Les formules

Inégalité de Hölder

$$f \in L^p, \quad g \in L^{p'} \Rightarrow fg \in L^1$$

Inégalité de Young Soient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ alors

$$f \in L^p, \quad g \in L^q \Rightarrow f \star g \in L^r$$

et

$$\| f \star g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

Changement de variables en coordonnées polaires

$$\int_{B_n(0,1)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{R=0}^{1} \int_{\theta \in S^{n-1}} f(r,\theta) r^{n-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta :$$

Les operations

Operations	$\varphi \in \mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty$, $\gamma \in \mathcal{D}'$	Exemple
Réflexion	$< \tilde{\gamma}, \varphi > = < \gamma, \varphi(-\cdot) >$	
Conjugaison	$< \bar{\gamma}, \varphi > = \overline{< \gamma, \bar{\varphi} >}$	
Multiplication	$< f\gamma, \varphi > = < \gamma, f\varphi >$	
Differentiation	$\forall i \quad < \partial_i \gamma, \varphi > = < \gamma, -\partial_i \varphi >$	$\mathbb{1}'_{\mathbb{R}^+} = \delta_0$
	$\forall \vec{\alpha} \quad < \partial_{\vec{\alpha}} \gamma, \varphi > = (-1)^{\lvert\alpha\rvert} < \gamma, \partial_{\vec{\alpha}} \varphi >$	
Convolution	$\gamma \star \varphi(x) = < \gamma, \varphi(x - \cdot) >$	$\delta_0 \star \varphi = \varphi$
	$\partial^\alpha(\gamma \star \varphi) = \partial^\alpha \gamma \star \varphi = \gamma \star \partial^\alpha \varphi$	
	$< \gamma \star \psi, \varphi > = < \gamma, \tilde{\psi} \star \varphi >$	

Fourier

Pour $f, g \in L^1$, $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
Première inversion de Fourier : Si $f \in L^1$ et $\mathcal{F}f \in L^1$ alors $f = (2\pi)^{-d} \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)$
Pour $u \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}^{-1}u = (2\pi)^{-d} \widetilde{\mathcal{F}u}$
Pour $u \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = i^{\lvert\alpha\rvert} \xi^\alpha \mathcal{F}(u)$
Pour $u \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}(x^\alpha u) = i^{\lvert\alpha\rvert} \partial_{\xi^\alpha}^{\lvert\alpha\rvert} \mathcal{F}(u)$

Gaussienne

Définition : $G_a(x) = \exp(-\frac{a|x|^2}{2})$

1. $\mathcal{F}G_a(\xi) = (\frac{2\pi}{a})^{\frac{d}{2}} \exp(-\frac{|\xi|^2}{2a})$

Formule d'intégration par parties, formule de la moyenne

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de classe C^1 et $u \in C^1(\overline{\Omega})$, on a

$$\int_\Omega u \partial_i v \, dx = \int_{\partial\Omega} uvn_i d\sigma - \int_\Omega v \partial_i u \, dx$$

Si $u \in C^2(\Omega)$ et $B(x_0, R) \subset\subset \Omega$ une boule, alors il existe $y_0, y_1 \in B$ tels que

$$\frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B(x_0,R)} u \, d\sigma = u(x_0) + \frac{1}{2N} R^2 \Delta u(y_0)$$

et

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B(x_0,R)} u \, dx = u(x_0) + \frac{1}{2(N+2)} R^2 \Delta u(y_1).$$

Espaces de Sobolev

$H^1(\Omega)$ est l'espace de Hilbert des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx$$

$H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ pour la norme H^1.

Si Ω est borné, on a l'inégalité de Poincaré : il existe $C = C(\Omega, N) > 0$ t.q.

$$\int_\Omega \varphi^2 \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx \qquad \text{pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Si $G \in C^1(\mathbb{R})$, $G(0) = 0$ et $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et si $u \in H^1(\Omega)$, alors $v = G \circ u \in H^1(\Omega)$ et $\partial_i v = (G' \circ u) \, \partial_i u$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Si $u \in H^1(\Omega)$ est à support compact, alors $u \in H_0^1(\Omega)$.

Intégration

Pour toute fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, les fonctions $u^+ = u\mathbf{1_{u \geq 0}}$ et $u^- = -u\mathbf{1_{u \leq 0}}$ vérifient $u = u^+ - u^-$, $u^\pm \geq 0$ p.p. et $u^+ u^- = 0$ p.p.